

<連載：PIDの基本，チューニング則，PIDベースの高度制御>

第2回 PID制御

PID Control

須田信英*

大阪大学 名誉教授

Nobuhide Suda

Professor Emeritas, Osaka University

3 PID制御の調整法

3.1 PID制御の調整則の例

前回の最後に述べたとおり，制御則としてPID制御を採用することにすれば，制御系の設計は三つのパラメータ，比例ゲイン K_P ，積分時間 T_I ，微分時間 T_D の値を決めることに集約される．これをPID制御の調整（チューニング，tuning）といい，チューニングのガイドラインをPID制御の調整則と呼んでいる．

PID制御の調整は，まず制御対象の特性の大まかな特徴に基づいて，上記三つのパラメータのおよその値を決める初期設定を行う．この初期設定によって十分満足できる制御特性が得られるとは限らず，現場で実際の制御特性を見ながら再調整することが必要となる場合が多い．ここで述べる調整則は，初期設定のガイドラインである．再調整については，かつては運転員の熟練に頼っていたが，近年これを自動化するさまざまな手法が工夫され，セルフ・チューニングとか，オート・チューニングと呼ばれているが，その詳細には立ち入らない．

初期設定の調整則はかなり多くの種類があり，文献2の2.2節にそのいくつかが紹介されている．それ以外にも古い調整則の改良版だとか，新しい制御理論を応用する試みなど，さまざまなものが提案されている．ここではそれらを列挙するのではなく，共通の基盤となっている基本的な考え方の説明に重点を置くこととする．その説明の素材にするため，二つの代表的な調整則の概要を先ず紹介する．

[限界感度法]

前回2.1節で述べたとおり，比例制御で比例ゲイン K_P を徐々に大きくしていくと，ステップ状外乱に対する制御量の応答はしだいに振動的になる．初めのうちは振動といってもその振幅は徐々に減衰し，最終的には振動が消えるが，さらに比例ゲインを大きくすると，ついには振動の振幅が減衰せずに増大するようになるのがふつうである．その境界のところ，すなわち振幅は減衰もせず，さりとて増大もしないで，一定振幅の持続振動が継続する状態となる比例ゲインの値を見つける．それを限界ゲインと呼び，ここでは K_C で表す．また，その持続振動の周期を限界周期と呼び，ここでは T_C で表す．

この限界ゲインと限界周期を手がかりに初期設定を行うのが限界感度法と呼ばれる調整則である．1942年にZiegler and Nicholsが発表したもので，その誕生の経緯については文献3で少し述べておいた．最も古い調整則であるといつても多分間違いのないと思うが，60年以上たった今日でもしばしば引用され，またその基本的着想を活かしながらいくつかの改良版も提案されている．

限界感度法では，PID制御について三つのパラメータを次のように選ぶのがよいとしている．

$$\text{比例ゲイン} \quad K_P = 0.6K_C$$

$$\text{積分時間} \quad T_I = 0.5T_C$$

$$\text{微分時間} \quad T_D = 0.125T_C$$

P制御とPI制御についてのガイドラインもあり，文献2の表2.3に示してある．いずれもさまざまな実験を通じて経験的に見いだされたものようである．

*〒180-0013 武蔵野市西久保 1-44-15

TEL&FAX:0422-54-6624

E-mail:nsuda@gakushikai.jp

文献2では9つの例題について限界感度法を適用してシミュレーションを行った．ここでは前回 Fig.2~5 に用いたのと同じ例題についてシミュレーション結果を示そう．因みに，この例では $K_C=32.5$, $T_C=3.14$ である．Fig.6 は目標値がステップ状に変化したときの追従特性を示す図であり，Fig.7 はステップ状の外乱が加わったときの外乱効果の抑制を示すものである．

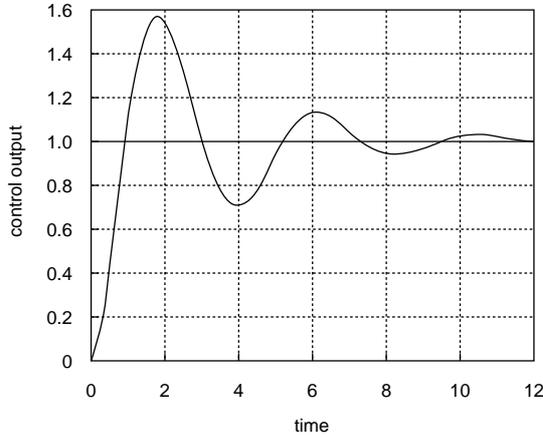


Fig.6 step response for setpoint change

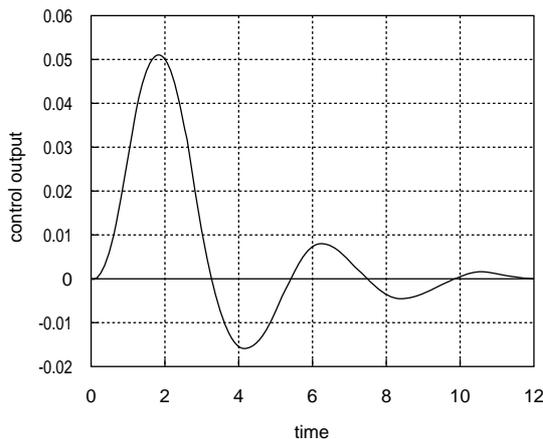


Fig.7 step response for disturbance input

[Chien, Hrones and Reswick の調整則]

この方法では限界感度法と異なり，制御は行わず制御対象だけ切り離れた状態で，制御対象の特性を調べる．制御対象の入力である操作量を高さ ' 1 ' のステップ状に変化させ，それに対する制御対象の出力である制御量の応答を求める．これを制御対象のステップ応答と呼ぶことが多い．ステップ応答はほとんどの場合，S字を横に引き伸ばしたような，いわゆるシグモイド型曲線となる．い

つも使う例題のステップ応答 $h(t)$ を Fig.8 に示す．

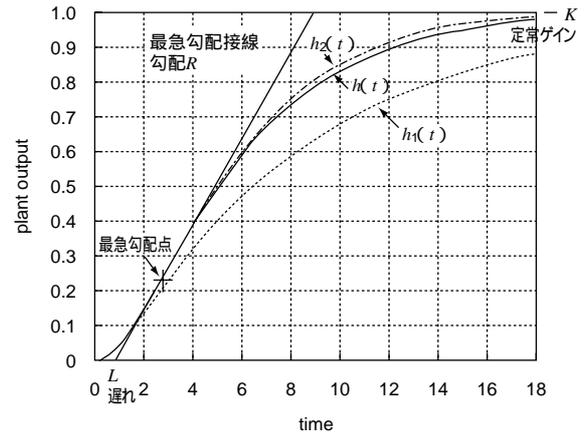


Fig.8 comparison of step response

ステップ応答が最終的に落ち着く値を定常ゲインと呼び，ここでは K と表そう．ステップ応答曲線の最も勾配が急なところ，つまり変曲点において接線を引きその勾配を R とする．この接線が横軸と交わる時刻を L とし，遅れと呼ぶことにする．また， K/R は，容易にわかるとおり，接線が零から定常ゲイン K に達するまでの時間であり，これを T と表す．

Chien, Hrones and Reswick は 1952 年に，この K , R , L に基づく調整則を提案した．4つの場合に分けて，それぞれ P 制御，PI 制御，PID 制御に対する調整則を与えているが，詳細は文献2の表 2.6 に譲り，ここでは2例だけを示そう．PID 制御について，目標値追従を目的とするときは

$$\begin{aligned} \text{比例ゲイン} & K_P = 0.6/RL \\ \text{積分時間} & T_I = T \\ \text{微分時間} & T_D = 0.5L \end{aligned}$$

外乱効果の抑制を目的とするときは

$$\begin{aligned} \text{比例ゲイン} & K_P = 0.95/RL \\ \text{積分時間} & T_I = 2.38L \\ \text{微分時間} & T_D = 0.4L \end{aligned}$$

と選ぶのがよいとしている．

いつもの例題について，この調整則を適用しよう．Fig.8には最急勾配点を + 記号で示し，その点での接線も記入してある．この例では， $K=1$, $R=0.124$, $L=0.91$ である．

目標値追従のシミュレーション結果を Fig.9 に，外乱効果の抑制の方を Fig.10 に示す．

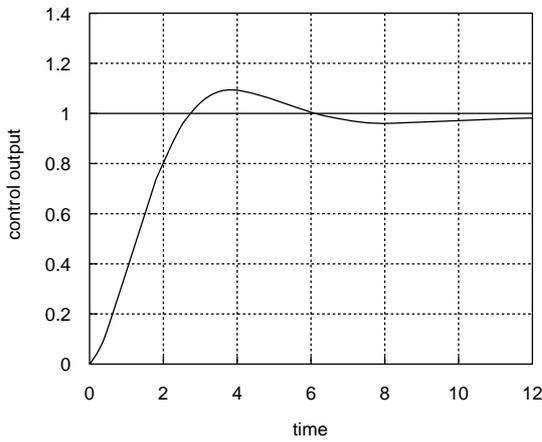


Fig.9 step response for setpoint change

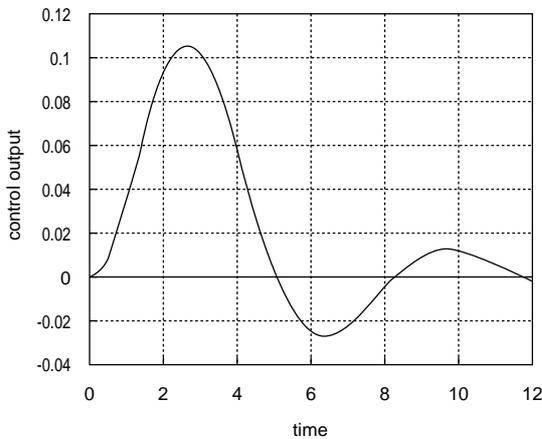


Fig.10 step response for disturbance input

3.2 制御特性の評価

これまで、どういう制御特性が好ましいのかについて説明せずに話を進めてきた。あらためてここで制御特性の評価法について述べよう。

制御特性の良さは、いろいろな視点から多角的に評価されなければならないが、先ず必要とされるのは即応性と減衰特性であろう。

目標値が変わったとき、制御量がゆっくりと長時間かかって追従するのは好ましいことではない。外乱効果の抑制についても同様で、外乱の効果が長時間続くのは好ましくない。すなわち、目標値の変化によるしる、外乱の効果にしる、生じた偏差はなるべく早く消えることが望ましい。これを即応性という。もっとも、偏差が完全に零になるには無限に長い時間が必要なので、偏差が消えるとは、偏差の絶対値が実用上許容される範囲に収まるという意味である。

目標値の変化や外乱の効果で生じた偏差が振動的である場合、その振幅が増大するようでは論外であるが、振幅が減衰するにしてもあまり何回も上がったったりするのは好ましくない。振動するにしても、その振幅はなるべく早く減衰して振動が消えることが望ましい。これを減衰特性という。ここでも、振動が消えるとは、振幅が実用上許容される範囲に収まるという意味である。

しかし、制御には即応性と減衰特性が重要だというだけでは、自動車には安全性と乗り心地が重要だということと同じで、具体的な設計指標にはならない。そこで即応性と減衰特性の指標がいろいろ工夫されている。

目標値の単位ステップ状変化に対する制御量の応答、すなわち目標値 $r(t)$ を入力、制御量 $z(t)$ を出力とするステップ応答の波形に注目するのがひとつの考え方である。

制御量のステップ応答が Fig.11 のような形であったとしよう。

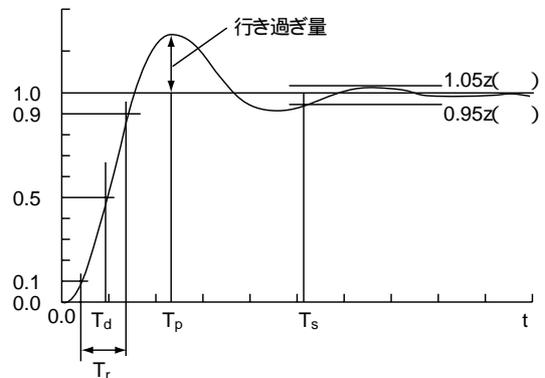


Fig.11 ステップ応答と評価の尺度

制御量が最終的に落ち着く値を定常値と呼ぶ。この定常値を目標値から引いた差が 2.1 節で述べた定常偏差である。定常偏差が存在することは具合が悪いから、積分動作を含めて定常偏差は生じないようにしてあるとしよう。

最初に定常値を超えて行き過ぎる量と定常値との比をオーバーシュートまたは行き過ぎ量という。制御量のオーバーシュートは、制御系の減衰特性を反映している。温度、圧力など制御量の過大な上昇を避けたいとか、ロボットマニピュレータが行き過ぎると何かと衝突する場合など、行き過ぎ量は零を目指すことがある。即応性の観点から 20%程度行き過ぎに設計するのがよいとされることもある。

最初の行き過ぎと次の行き過ぎの比は、減衰特性の目安となる。この比が 4 分の 1 程度であるのがよいとされることがあり、1/4 減衰の制御と呼ばれる。

制御量が定常値の 50%に達するまでの時間 T_d を遅れ

時間, ある範囲, たとえば定常値の 10% から 90% まで変化する時間 T_r を立ち上がり時間, 最初の行き過ぎに達するまでの時間 T_p をピーク時間という. いずれも即応性の指標とみられるが, 初めのうちほとんど変化せず, 変化し始めると立ち上がりは速いという場合には, 遅れ時間は総合的な即応性を表し, 立ち上がり時間はそうでないというような差がある.

制御量が定常値を中心とするある一定幅, たとえば上下 5% の範囲内に収まるまでの時間 T_s を整定時間という. 減衰特性と即応性の両方に関係している.

このほか, 偏差の絶対値や偏差の自乗の積分だとか, ゲイン余裕・位相余裕とか, ピークゲインとか, さまざまな指標が用いられるが, ここでは省略する (文献 2 の 2.1.2 節参照)

限界感度法は 1/4 減衰の制御を目指したものとされる. Chien, Hrones and Reswick の調整則は, 行き過ぎ量を零とする場合, 20% とする場合の両方について到達時間最小を目指している. 詳しいことは文献 2 の 25 ページに譲る. 先に例として示したのは行き過ぎ量を零とする場合の方である.

3.3 調整則と既製服

3.1 節で紹介した限界感度法では, 制御対象について限界ゲインと限界周期という 2 つの特徴パラメータを実測して, それに基づいて調整を行っている. 一方, Chien, Hrones and Reswick の方は, 定常ゲイン, 最急勾配, 遅れという 3 つの特徴パラメータを用いている.

現実の制御対象の動特性は千差万別であるから, 本来ならばそれぞれの制御対象の動特性を詳しく調べて, それにもっとも適した PID 制御パラメータ (比例ゲイン, 積分時間, 微分時間) を選定するべきであろう. しかしそれは大変手間がかかるので, PID 制御パラメータを制御対象の 2 個あるいは 3 個の特徴パラメータの関数として, あらかじめ決めておき, 現実の制御対象について特徴パラメータを実測して, それに対応する PID 制御パラメータを初期設定として採用するのである. このことは 3.1 節で紹介した 2 つの調整法だけでなく, その他の多くの調整法にも共通である.

これは, 既製服の発想と似ている. 着る人の体型は千差万別であるから, 本来ならばそれぞれのお客の体型を詳しく調べて, それにもっとも適した洋服を仕立てるオーダーメイドがよいに決まっている. 手間を省くために, 標準的な体型のモデル集団に合わせてあらかじめ洋服を仕立てておき, お客の身長と体重を計って同じ身長, 体重

のモデルに合わせた洋服を棚から出して来るという既製服の発想が生まれる.

PID 制御でいえば, モデル集団は調整則を求める際に制御対象として想定する動特性のパターンであり, 文献 4 ではこれをテスト・バッチと呼んでいる. お客はもちろん実際の制御対象である. 実際の制御対象について限界振動やステップ応答を求めるのが身長, 体重の計測に相当している.

身長と体重が同じでも肩幅や胴回りが異なる人もあるから, モデルに合う服がどのお客にも合うとは限らないことを考えると, 既製服の論理がうまく機能するためには, モデル集団としてどういう体型の人を選ぶか, お客とモデルとを対比する際の体型の特徴パラメータとして何を選ぶか, 少なくともこの二点が大切であることがわかる. 特徴パラメータの数を増せば良い結果が得られるのは当然だが, 限りなく増していけば結局は各人各様でオーダーメイドしかないということになるから, 少い個数でしかも体型を適切に反映する特徴パラメータを見出す必要がある. それはモデル集団の選び方とも関連している.

3.4 テスト・バッチ

限界感度法がどういうテスト・バッチから導かれたのかははっきりしない. Chien, Hrones and Reswick の調整則を含め, いくつかの調整則で採用しているテスト・バッチは, 制御量 $z(t)$ のステップ応答が

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t < L \\ K \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t-L}{T}\right) \right\} & t \geq L \end{cases}$$

という数式で表されるものである. これは一次遅れとむだ時間システムと呼ばれる. 容易にわかるとおり, このステップ応答は時刻 L までは零で, それ以後最終値 K との差が指数関数的に減少するもので, 定常ゲインは明らかに K に等しい. 曲線の勾配は

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < L \\ \frac{K}{T} \exp\left(-\frac{t-L}{T}\right) & t \geq L \end{cases}$$

であるから, 最急勾配は $t = L$ における $R = K/T$ である. そうしてこの最急勾配接線が横軸と交わる点は時刻 L にほかならないから, 遅れは L である.

Fig.8 には例題と同じ定常ゲイン, 最急勾配, 遅れをもつ一次遅れとむだ時間システムのステップ応答 $h_1(t)$ を破線で示してある. それをみると, 特徴量パラメータが

一致しているにもかかわらず、例題のステップ応答 $h(t)$ とは曲線の形はかなり異なることがわかる。この例題だけでなく、ほかのでも似た状況がしばしば見受けられる。つまり一次遅れとむだ時間システムはテスト・パッチとしてあまり適当でないのである。

もっとよいテスト・パッチはいくつか提案されている。たとえば

$$h_m(t) = \begin{cases} 0 & t < L_m \\ K_m \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t - L_m}{T_m}\right) \right\}^m & t \geq L_m \end{cases} \quad m = 2, 3, \dots$$

というのがある。 $m=1$ ならば一次遅れとむだ時間システムに帰着することは明らかであろう。このテスト・パッチのパラメータ K_m, T_m, L_m と定常ゲイン, 最急勾配, 遅れとの間には

$$K_m = K, \quad T_m = (1 - 1/m)^{m-1} K/R, \\ L_m = L - T_m(1/m - 1 + 1/m)$$

という関係がある。したがって実際の制御対象について実測した定常ゲイン K , 最急勾配 R , 遅れ L を右辺に代入すれば, テスト・パッチのパラメータ K_m, T_m, L_m が確定する。

いつもの例題について, $m=2$ として計算してみると, $K_2=1, T_2=4.028, L_2=0.131$ となる。

Fig.8 には, 例題と同じ定常ゲイン, 最急勾配, 遅れをもつ $h_2(t)$ を鎖線で示してある。

一次遅れとむだ時間システムの $h_1(t)$ とは違って, 例題のステップ応答をかなりよく近似していることがわかる。いくつかの例題について調べたが, その範囲では $m=2$ で十分で, m を 3 以上にしても近似の度合いはほとんど改善されない。

[補足]

この解説では, 伝達関数についてきちんと説明をしていない。そこで解説の内容は, 伝達関数を用いなくて記述できる範囲にとどめている。伝達関数について十分な知識のある方のために補足すると, ステップ応答が $h_1(t)$ となる一次遅れとむだ時間システムの伝達関数は

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \exp(-Ls)$$

である。

ステップ応答が上記の $h_m(t)$ となるシステムの伝達関数は

$$G_m(s) =$$

$$\frac{K_m}{(1 + T_m s)(1 + T_m s/2) \dots (1 + T_m s/m)} \exp(-L_m s)$$

である。

このほかに

$$\hat{G}_m(s) = \frac{\hat{K}_m}{(1 + \hat{T}_m s)^m} \exp(-\hat{L}_m s) \quad m = 2, 3, \dots$$

というテスト・パッチも提案されている。前述の $h_m(t)$ はステップ応答の一部分に m 乗がついており, こちらは伝達関数の一部分に m 乗がついている対比が面白い。こちらもやはり $m=1$ ならば一次遅れとむだ時間システムに帰着することは明らかであろう。この場合も, いくつかの例題について調べた範囲では $m=2$ で十分で, m を 3 以上にしても近似の度合いはほとんど改善されない。

$G_m(s)$ と $\hat{G}_m(s)$ との近似のよさの比較も, いくつかの例題について行ったが, 特に優劣は見られなかった。

3.5 特徴パラメータ

繰り返しになるが, 限界感度法では, 制御対象について限界ゲインと限界周期という 2 つの特徴パラメータ, Chien, Hrones and Reswick の調整則では, 定常ゲイン, 最急勾配, 遅れという 3 つの特徴パラメータを実測して, それに基づいて調整を行っている。

前者は比例制御のもとでの振動状態によって, 後者は制御対象単独のステップ応答によって, それぞれ測定されるもので, 測定方法が異なっているが, さらに大きい違いは特徴パラメータの個数である。

特徴パラメータに基づいて決定すべき PID 制御パラメータは, 比例ゲイン, 積分時間, 微分時間の 3 つであるから, 特徴パラメータの方も 3 つ選定するのが適当である。

実際 Chien, Hrones and Reswick の調整則ではそうになっている。ところが限界感度法では特徴パラメータが 2 つしかないから, 3 つの PID 制御パラメータを独立に決めることはできない。3.1 で述べた調整公式から明らかのように, $T_I=4T_D$ の関係があり, 積分時間と微分時間とは一方を決めると他方は自動的に定まってしまうことになっている。

よい PID 制御を実現するための自由度が折角 3 つあるのに, 2 つに減らしてしまっているわけである。Chien, Hrones and Reswick の調整則では, 目標値追従を目的とする場合には 3 つの特徴パラメータを全て活用しているが, 外乱効果の抑制を目的とする場合には, 限界感度法

と同様に、積分時間と微分時間とは一方を決めると他方は自動的に定まってしまうことになっている。

テスト・バッチとの関連でいえば、一次遅れとむだ時間システムにしても、その改良版にしても、3つのパラメータを含んでいる。定常ゲイン、最急勾配、遅れが与えられると、テスト・バッチの中の1つのシステムが選出される。つまりモデル集団の中のどのモデルを参照すべきかが確定するのである。しかし限界ゲインと限界周期を与えただけでは、そういうパラメータをもつシステムは一次遅れとむだ時間システムの中にも、その改良版の中にも、無数に存在し、参照すべきモデルが1つに定まらない。

こういう事情に鑑みて、限界感度法における限界ゲインと限界周期に加えて、第三の特徴パラメータを導入しようという試みがいくつか行われている。その一つに、定常ゲイン K を実測して、それと限界ゲインとから定まる $\kappa=1/KK_c$ を第三のパラメータとするのがある。

その場合、制御対象についての実測値を K_c, T_c, κ とすると、モデルのパラメータのうち K_m については m と無関係に

$$K_m = 1/K_c \kappa$$

であり、 T_m は方程式

$$\prod_{k=1}^m \left\{ 1 + \left(2\pi \frac{T_m}{kT_c} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\kappa^2}$$

を解いて求められる。 L_m は

$$L_m = \frac{T_c}{2} - \frac{T_c}{2\pi} \sum_{k=1}^m \tan^{-1} \left(2\pi \frac{T_m}{kT_c} \right)$$

で定められる。

いつもの例題に適用してみると、すでに述べたように、この例では、 $K=1, K_c=32.5$ であるから $\kappa=0.0308$ となり、 $m=2$ として上記の式により計算すると $K_2=1, T_2=3.953, L_2=0.187$ が得られる。

前節で定常ゲイン、最急勾配、遅れから求めた値 ($K_2=1, T_2=4.028, L_2=0.131$) とそれほど差はない。ステップ応答を計算してみても、比較的良好な曲線となる。

[補足]

先にもう一つの改良テスト・バッチ $\hat{G}_m(s)$ を紹介した。そのモデルパラメータ、 $\hat{K}_m, \hat{T}_m, \hat{L}_m$ の求め方や、定常ゲイン、最急勾配、遅れから求めた値と限界ゲイン、限界周期および κ から求めた値との比較などは文献5に譲る。

3.6 改良テストバッチに基づく調整の例

前2節で、 $h_m(t)$ はよいテスト・バッチであって、しかも $m=2$ で十分であること、テスト・バッチと実際の対象とを対比する特徴パラメータとしては、定常ゲイン、最急勾配、遅れという組み合わせと、限界ゲイン、限界周期、 κ という組み合わせが考えられ、両者がよく似た結果を与えることを述べた。ここではひとつの例題についても同様な結果が得られている。

また、詳細は省くが、[補足]で触れた $\hat{G}_m(s)$ についても、よいテスト・バッチであって、しかも $m=2$ で十分であること、特徴パラメータの上述の2つの組み合わせがよく似た結果を与えることがわかっている。

したがって、対象の特性を近似するモデルを選定するには、テスト・バッチが2種類、特徴パラメータの組み合わせが2種類、合わせて4種類の方法のいずれかを採用すればよいことになる。

そうして近似モデルが得られると、理論的な考察や解析によって、適切なPID制御パラメータを選ぶことが出来る。詳細は省くけれども、文献2の2.2.3節で説明した制御対象のステップ応答のモーメントに基づく方法は、その一つの手段である。

いつもの例題について、テスト・バッチは $h_2(t)$ 、特徴パラメータは定常ゲイン、最急勾配、遅れという組み合わせを採用して近似モデルを求め、上述の方法を適用して調整した例を Figs.12, 13 に示す。

Fig.12 は目標値追従を目的として調整した結果、Fig.13 は外乱効果の抑制を目的として調整した結果である。

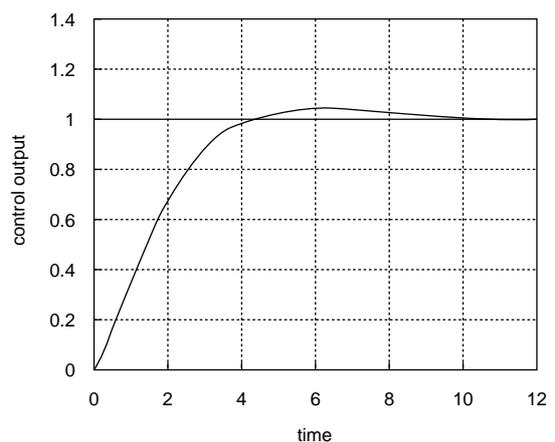


Fig.12 step response for setpoint change

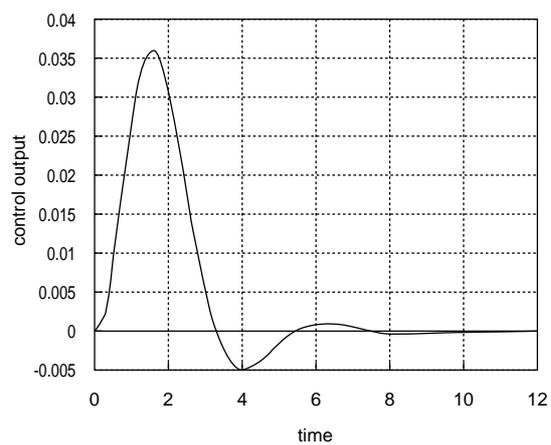


Fig.13 step response for disturbance input

[参考文献]

- 3) 荒木光彦・須田信英: PID 制御の歴史, 計測と制御, リレー解説《PID 制御》, 第 1 回: 36-9, 643/647, 1997
- 4) K. J. Åström and T. Hägglund: *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2nd Edition, Instrument Society of America, 1995
- 5) 須田信英: SICE セミナー「古典制御」—新しい視点からの再入門— テキスト, 第 6 章 PID 制御, 59/70, 1998